

Consideramos una partícula de masa m bajo una fuerza central $\vec{F} = F(r)\hat{r}$

Desde el centro desde el cual se ejerce la fuerza se conserva el momento angular pues la fuerza no hace torque, y también se conserva la energía mecánica pues las fuerzas centrales, así definidas, son siempre conservativas:

$$L = mr^2\dot{\theta}$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

Estas son las dos ecuaciones de movimiento, con E y L constantes que dependen de las condiciones iniciales. Si bien el movimiento es en el espacio tridimensional, vieron en la teórica que por la conservación del impulso angular, el movimiento se desarrolla en un plano.

La segunda es una ecuación diferencial de primer orden para la coordenada r que se puede resolver por integración directa

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r)\right)} \Rightarrow \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r)\right)}} = \int dt$$

Que se pueda integrar o no dependerá del potencial. Una vez que tenemos $r(t)$, vamos a la ecuación del momento angular para obtener $\theta(t)$

Si el potencial es gravitatorio

$$V(r) = -\frac{GMm}{r}$$

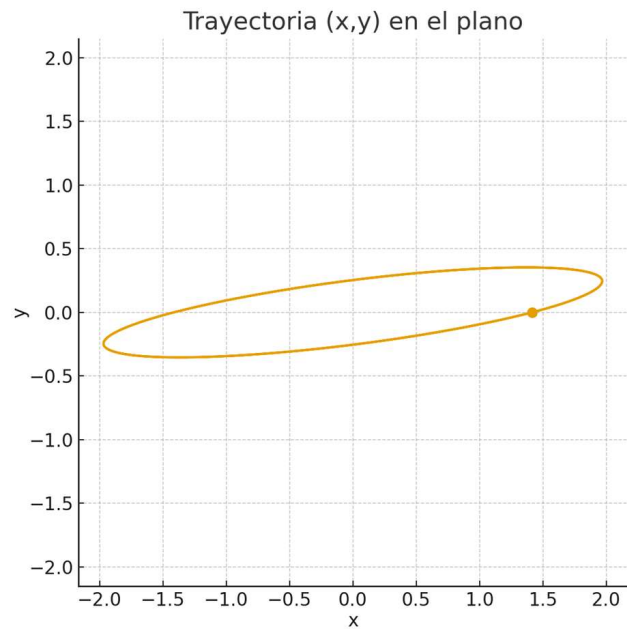
se puede integrar y las trayectorias son cónicas.

Si el potencial es elástico con longitud natural igual a 0

$$V(r) = -kr^2$$

también se puede integrar.

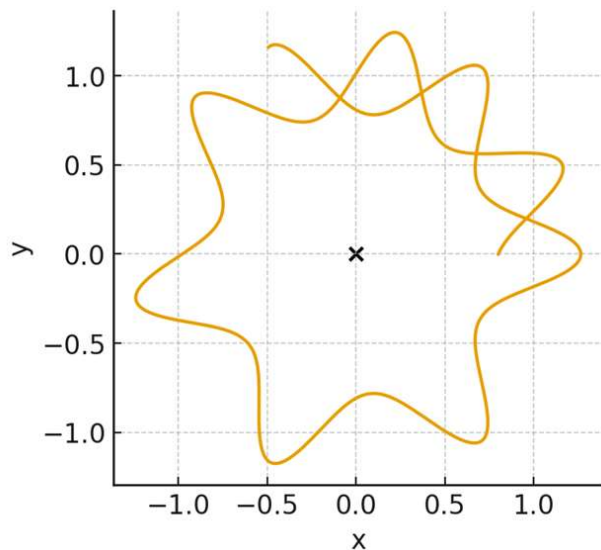
Las trayectorias que se obtienen parecen elipses (pero no lo son)



Si el resorte tiene longitud natural distinta de 0

$$V(r) = -k(r - l_0)^2$$

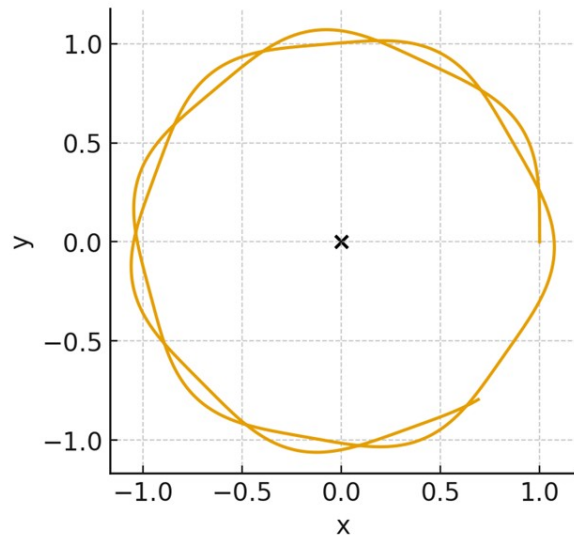
la integral no se puede resolver en términos de funciones elementales. Las órbitas obtenidas numéricamente son de este estilo.



Como ya vimos, para alguna combinación específica de parámetros y condiciones iniciales, se pueden obtener órbitas circulares, que corresponden a tener energía igual al mínimo del potencial efectivo. Si la

energía es apenas más grande que la que corresponde a un movimiento circular, podemos aproximar el movimiento en r como el de un oscilador armónico.

En el ejemplo anterior podríamos obtener algo así



Último comentario. Si en vez de comenzar el problema planteando las conservaciones, planteamos Newton, tenemos

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0$$

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r)$$

Que son las dos ecuaciones de movimiento, y son ecuaciones diferenciales de orden 2. Las ecuaciones de conservación son las primeras integrales de estas ecuaciones, por eso aparecen dos constantes de integración, E y L ; y son de orden 1, sólo aparecen las coordenadas y sus derivadas primeras.